MATEMÁTICAS

ÁREA: BÁSICA CLAVE DE LA ASIGNATURA: LA 102

OBJETIVO(S) GENERAL(ES) DE LA ASIGNATURA:

Al término del curso, el alumno analizará los principios de las matemáticas; aplicará los mismos como herramientas para operar en los comportamientos estadísticos, económicos y en particular los administrativos, dentro de las organizaciones.

4. Derivadas

Los orígenes del Cálculo estuvieron motivados por el deseo de resolver diversos problemas vinculados al movimiento de los cuerpos, como problemas de tipo geométrico de importancia en Óptica y problemas de cálculo de valores máximos y mínimos de una función dada. Simplificando, podemos destacar dos problemas principales:

- Determinar la tangente a una curva en un punto (el problema de las tangentes).
- Determinar el área encerrada por una curva (el problema de las cuadraturas).

Son los conceptos de derivada e integral, respectivamente, los que permiten resolver satisfactoriamente dichos problemas. Mientras que el concepto de integral tiene sus raíces en la antigüedad clásica, la otra idea fundamental del Cálculo

. Fue el descubrimiento efectuado por Sir Isaac Newton (1642 - 1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) de la relación

magnífico desarrollo del Cálculo. Si bien los trabajos de Newton y Leibniz son decisivos por sus aportaciones e influencia, no hay que olvidar que ellos son el punto culminante de un largo proceso en el que han participado científicos de la talla de Johannes Kepler (1571 - 1630), Descartes (1596 - 1650), Pierre de Fermat (1601 - 1665), John Wallis (1616 -1703) e Isaac Barrow (1630 - 1677) entre otros.

4.4 Derivadas Básicas

En esta sección se mostrarán las propiedades de las derivadas como son las reglas de derivación y las derivadas de funciones elementales, como son las funciones trigonométricas, función logaritmo y la función exponencial.

Nota: Para estas secciones utilizaremos la notación de Leibniz para las derivadas: $\frac{d}{dx}(x)$

Reglas de derivación

- **Funciones potencias**

Empecemos con la función constante $f(x) = c$. La gráfica de esta función es la recta horizontal y=c, la cual tiene pendiente 0, de modo que debemos tener $\frac{d}{dx}(x) = 0$.

En seguida, consideremos las funciones $f(x)=x^n$, donde n es un entero positivo. Si n=1 la gráfica de f es la recta y=x, la cual tiene pendiente 1, de modo que $\frac{d}{dx}(x) = 1$

De forma general tenemos que $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$.

Ejemplo.

Si $f(x) = x^6$, entonces $f'(x) = 6x^5$

- **Regla del múltiplo constante**

Si c es una constante y f es una función diferenciable entonces,

$$\frac{d}{dx}\big(cf(x)\big) = c\frac{d}{dx}f(x)$$

Ejemplo.

$$\frac{d}{dx}(3x^4) = 3\frac{d}{dx}(x^4) = 3(4x^3) = 12x^3$$

$$\frac{d}{dx}(-x) = \frac{d}{dx}(-1x) = -1\frac{d}{dx}(x) = -1(1) = -1$$

- **Regla de la suma**

Sean f y g diferenciables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)]=\frac{d}{dx}[f(x)]+\frac{d}{dx}[g(x)]$$

De manera semejante tenemos que

$$\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)]=\frac{d}{dx}[f(x)]-\frac{d}{dx}[g(x)]$$

Ejemplo.

$$\frac{d}{dx}[x^8+12x^5-4x^4-6x+5]=\frac{d}{dx}[x^8]+\frac{d}{dx}[12x^5]-\frac{d}{dx}[4x^4]-\frac{d}{dx}[6x]+\frac{d}{dx}(5)$$

$$=[8x^7+60x^4-16x^3-6]$$

- **Derivada de la función exponencial**

$$\frac{d}{dx}e^x=e^x$$

Ejemplo.

Si $f(x)=e^x-x$ calcular la derivada

$$\frac{d}{dx}(e^x-x)=\frac{d}{dx}e^x-\frac{d}{dx}x=e^x-1$$

- **Regla del producto**

Si tanto f y g son diferenciables, entonces:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]=f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]+\ g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

Ejemplo.

Una compañía telefónica desea estimar el número de líneas nuevas de teléfonos que necesitan instalar durante el siguiente mes. A principios de mayo de 2014, la compañía tenía 100,000 suscriptores, cada uno con un promedio de 1.2 líneas telefónicas. Se estimó que los clientes están aumentando a una razón de 1,000 por cada mes. Al realizar un estudio entre los clientes, halló que cada uno pretendía instalar un promedio de 0.01 líneas telefónicas nuevas para fines de mayo.

Estimar el número de líneas nuevas que la compañía tendrá que instalar en mayo de 2014. Calculando la tasa de crecimiento de las líneas a principios de cada mes.

Solución.

Sean s(t) los clientes y n(t) la cantidad de líneas telefónicas por clientes en el tiempo t, donde t se mide en años y t=0 corresponde al inicio de 2014. Entonces el número total de líneas se expresa por

L(t)=s(t)n(t)

Deseamos calcular L´(0). Según la regla del producto, tenemos

$$L'(t) = \frac{d}{dx}[s(t)n(t)] = s(t)\frac{d}{dx}n(t) + n(t)\frac{d}{dx}s(t)$$

De donde s(0)=100,000 y n(0)=1.2. Las estimaciones de la compañía referentes a las tasas de incremento son que $s'(0) \approx 1000\ y\ n'(0) \approx 0.01$. Por consiguiente,

$$L'(0) = s(0)n'(0) + n(0)s'(0)$$

$$\approx 100000(0.01) + (1.2)(1000) = 2200$$

La compañía necesita instalar unas 2,200 líneas nuevas durante mayo de 2014.

- **Regla del cociente**

Si tanto f y g son derivables, entonces:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\left[g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)\right]}{[g(x)]^2}$$

Ejemplo. Sea $y = \frac{2x^3+x}{x+5}$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{2x^3+x}{x+5}\right] = \frac{[(x+5)(6x^2+1) - (2x^3+x)(1)]}{[x+5]^2}$$

$$= \frac{[(6x^3+30x^2+x+5) - (2x^3+x)]}{[x+5]^2}$$

$$\frac{4x^3 + 30x^2 + 5)}{[x+5]^2}$$

- **Derivadas de funciones trigonométricas**

i. La derivada de la función seno se expresa como sigue:

$$\frac{d}{dx}(sen\ x) = \cos x$$

Ejemplo. Derivar y= $x^2 sen(x)$

Por la regla del producto se tiene

$$y' = x^2 \frac{d}{dx} sen(x) + sen(x) \frac{d}{dx} x^2$$

$$= x^2 cosx + 2x\ senx$$

ii. La derivada de la función coseno se expresa como sigue:

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -sen\ x$$

iii. La derivada de la función tangente se expresa como sigue:

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

Es fácil hallar las derivadas de las funciones trigonométricas restantes, csc, sec y cot, aplicando la regla del cociente. En la tabla siguiente se muestran las fórmulas de derivación de las funciones trigonométricas:

$\frac{d}{dx}(sen\ x) = \cos x$	$\frac{d}{dx}(csc\ x) = -cscx\ \cot x$
$\frac{d}{dx}(\cos x) = -sen\ x$	$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\frac{d}{dx}(\cot x) = \csc^2 \mathrm{x}$

- **Derivadas de funciones logarítmicas**

Para derivar los logaritmos consideraremos dos casos.

i. Caso log_a

$$\frac{d}{dx}(log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$$

ii. Caso 10 =ln x

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Generalizando tenemos que

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln g(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

Ejemplo. Derivar $y = \ln(x^2 + 3)$

Haciendo $g(x) = x^2 + 3$ tenemos que

$$\frac{d}{dx}\ln\,(g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{2x}{x^2 + 3}$$

Para finalizar la sección mostraremos un resultado de suma importancia dentro del cálculo diferencial.

Teorema. (Derivación de una función compuesta o regla de la cadena). Sean $f: I \to \mathbb{R}$ y $g: J \to \mathbb{R}$, Como $f(I) \subset J$, y sea $h = g \circ f: I \to \mathbb{R}$ la función compuesta. Supongamos que *f* es derivables en a$\in I$ y que *g* es derivables en *f(a)*. Entonces *h* es derivable en *a* y $h'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

En particular, si *g* es derivable en J, la función compuesta *h* es derivable en todo punto de I donde *f* sea derivable.

Ejemplo

Sabiendo que y=sen x y x=cos t, se pide calcular la derivada de y con respecto a t.

Lo que nos piden es calcular la derivada de la función compuesta h(t)= sen(cos t). Aquí *g*(x)=sen x, *f*(t)= cos t. Tenemos que

$h'(t) = g'(f(t))f'(t) = -\cos(\cos t)\, sen t$

Pero esta igualdad debe ser función de t por lo que hay que sustituir x=cos t y se vuelve a obtener el resultado anterior.

4.5 Valores Máximos y Valores Mínimos

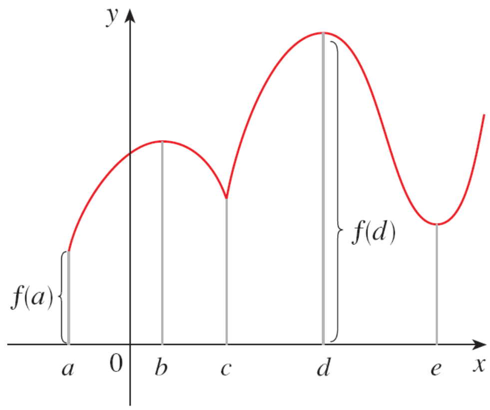
Algunas de las aplicaciones más importantes del cálculo diferencial son los problemas de optimización, en los cuales se pide la manera óptima (la mejor) de hacer algo.

Estos problemas se pueden reducir a encontrar los valores máximo o mínimo de una función.

En seguida se define con exactitud lo que son valores máximo y mínimo.

Una función f tiene un **máximo absoluto** (o **máximo global**) en c si $f(c) \geq f(x)$ para todo x en D, donde D es el dominio de *f*. El número *f(c)* se llama **valor máximo** de *f* en D.

De manera análoga, *f* tiene un **mínimo absoluto** en c si $f(c) \leq f(x)$ para todo x en D; el número *f(c)* se denomina **valor mínimo** de *f* en D. Los valores máximo y mínimo de *f* se conocen como **valores extremos** de *f*.



En la figura *f(a)* es un mínimo y *f(d)* es un máximo.

En la figura anterior se muestra la gráfica de una función *f* con máximo absoluto en *d* y mínimo absoluto en *a*.

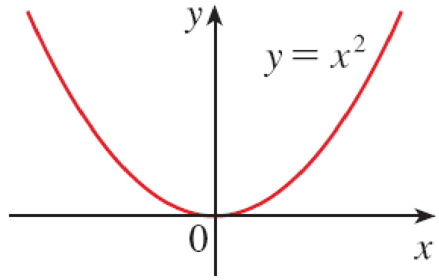
Observe que *(d, f(d))* es el punto más alto de la gráfica y *(a, f(a))* es el más bajo. Si sólo considera valores de x cercanos a *b* [por ejemplo, si restringe su atención al intervalo (*a*, c)] entonces *f(b)* es el más grande de esos valores de *f(x)* y se conoce como valor máximo local de *f*. De modo semejante, *f(c)* es el valor mínimo local de *f* porque $f(c) \leq f(x)$ para x cercano a c [por ejemplo en el intervalo (b, d)]. La función *f* también tiene un mínimo local en e. En general, se da la definición siguiente:

Una función *f* posee un **máximo local** (o **máximo relativo**) en *c* si $f(c) \geq f(x)$ cuando x está cercano a *c*. [Esto significa que $f(c) \geq f(x)$ para todo x en algún intervalo abierto que contiene a c]. De manera análoga, *f* tiene un **mínimo local** en *c* si $f(c) \leq f(x)$cuando x está cerca de *c*.

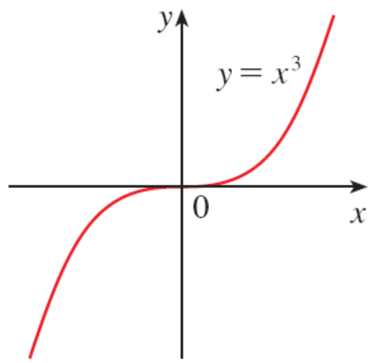
Ejemplos.

La función $f(x) = \cos x$ toma su valor máximo (local y absoluto) de un número infinito de veces, ya que $\cos 2\pi n = 1$ para cualquier entero n y $-1 \leq \cos x \ \leq 1$ para todo x. Del mismo$\cos(2n+1)\,\pi = -1$ modo, es su valor mínimo, donde n es cualquier entero.

Si $f(x) = x^2$, entonces $f(x) \geq f(0)$ porque $x^2 \geq 0$ para todo x. Por lo tanto $f(0) = 0$ es el valor mínimo absoluto (y local) de *f*. Esto corresponde al hecho de que el origen es el punto más bajo sobre la parábola $y = x^2$. Sin embargo, no existe el punto más alto sobre la parábola, por lo que esta función no tiene valor máximo.

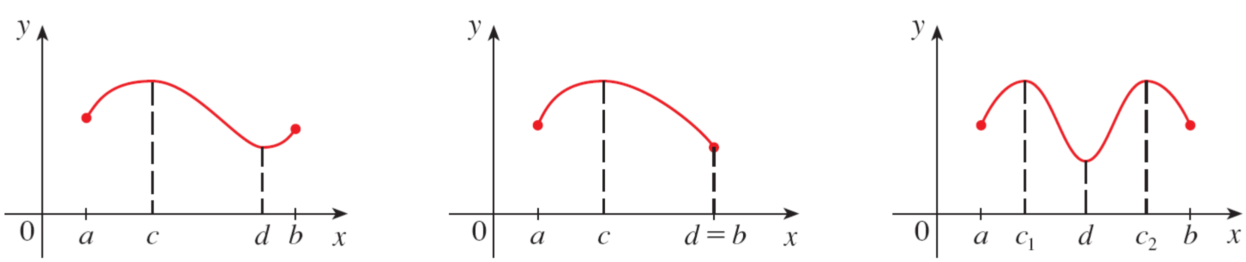


En la gráfica de la función $y = x^3$, esta función no tiene valor máximo absoluto ni valor mínimo absoluto. De hecho, tampoco posee valores extremos locales.



Ha visto que algunas funciones tienen valores extremos y otras no. En el teorema siguiente se dan las condiciones con que se garantiza que una función posea valores extremos.

Teorema del Valor Extremo. Si *f* es continua sobre un intervalo cerrado [a, b], entonces *f* alcanza un valor máximo absoluto *f* (c) y un valor mínimo absoluto *f(d)* en algunos números c y d en [a, b].



En las gráficas se ilustra el teorema del valor extremo. Observe que un valor extremo se puede tomar más de una vez.

El teorema del valor extremo dice que una función continua sobre un intervalo cerrado tiene un valor máximo y uno mínimo, pero no indica cómo hallarlos. Para ello utilizaremos el siguiente resultado.

Teorema de Fermat. Si f tiene un máximo o un mínimo local en c, y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c)=0$.

El teorema de Fermat en realidad sugiere que, por lo menos, debe empezar a buscar los valores extremos de f en los números c, donde $f'(c)=0$ o donde $f'(c)$ no existe. Estos números reciben un nombre especial.

Un **número crítico** de una función f es un número c en el dominio de f tal que $f'(c)=0$ o $f'(c)$ no existe.

Ejemplo. Encuentre los números críticos de $f(x) = x^{\frac{3}{5}}(4-x)$.

Aplicando la regla del producto obtenemos que $f'(x) = \frac{12-8x}{5x^{\frac{2}{5}}}$, por lo tanto, $f'(x) = 0$ si 12-8x=0, esto es, x = 3/2, y $f'(x)$ no existe cuando x=0. Por esto, los números críticos son 3/2 y 0.

En términos de los números críticos, el teorema de Fermat se puede volver a redactar como sigue:

Si f tiene un máximo o mínimo local en c, entonces c es un número crítico de f.

Para hallar un máximo o un mínimo absoluto de una función continua sobre un intervalo cerrado, observe que tiene un extremo local o se presenta en uno de los puntos extremos del intervalo. De este modo, el procedimiento siguiente de tres pasos siempre funciona.

Método del intervalo cerrado. Para hallar los valores máximo y mínimo absolutos de una función continua f sobre un intervalo cerrado [a, b]:

- Encuentre los valores de f en los números críticos de f en [a, b].
- Halle los valores de f en los puntos extremos del intervalo [a, b].
- El más grande de los valores de los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto; e más pequeño, el valor mínimo absoluto.

Ejemplo. El telescopio espacial Hubble fue puesto en operación el 24 de abril de 1990 por el trasbordador espacial Discovery. Un modelo para la velocidad del trasbordador durante su misión desde el lanzamiento en t=0 hasta que los cohetes auxiliares de combustible sólido se desprenden en el instante t=126 s, está dado por

$$v(t) = 0.001302t^3 - 0.09029t^2 + 23.61t - 3.083$$

(en pies por segundo). Usando este modelo, estime los valores máximo y mínimo absolutos de la aceleración del trasbordador entre el lanzamiento y el desprendimiento de los cohetes auxiliares de combustible sólido.

Solución. Se pide hallar los valores extremos no de la función de velocidad dada sino de la función de aceleración. Por consiguiente, primero necesita derivar para encontrar la aceleración:

$$v'(t) = 0.003906t^2 - 0.18058t + 23.61 = a(t)$$

Ahora aplique el método del intervalo cerrado a la función continua a en el intervalo $0 \leq t \leq 126$. Su derivada es

$$a'(t) = 0.007812t - 0.18058$$

El único número crítico que se presenta es $a'(t) = 0$:

$$t_1 = \frac{0.18058}{0.007812} \approx 23.12$$

Al evaluar a a(t) en el número crítico y en los extremos, tiene

$a(0) = 23.61 \qquad a(t_1) = 21.52 \qquad a(126) = 62.87$

De modo que la aceleración máxima es alrededor de 62.87 pies/s^2 y la aceleración mínima es de alrededor de 21.52 pies/s^2.

4.6 Cálculo

Isaac Newton (1642-1727) en 1664-1666 y G. W. Leibniz (1646-1716) en 1675 descubrieron independientemente el cálculo diferencial e integral. Sus enfoques y conceptos son distintos, pero llegan básicamente a los mismos resultados, llegando a un cálculo también algo distinto del que usamos ahora. Hasta entonces, en el periodo 1615-

1660, se había usado el cálculo infinitesimal por matemáticos de gran talla como Kepler, Cavalieri, Torricelli, Pascal, Fermat, Wallis, Gregory, Barrow, etc. Pero los métodos para hallar cuadraturas, y tangentes a curvas o problemas relacionados eran como una especie de matemática artesanal donde cada ejemplo resolvía un problema concreto, bien adaptado a la forma particular de cada objeto en cuestión. El gran mérito de lo que llamamos cálculo diferencial e integral es el de ser un algoritmo general que vale para todas expresiones analíticas a la vez y que se basa en que los procesos de cálculo de tangentes (derivación) y cuadraturas (integración) son procesos inversos el uno del otro.
Isaac Newton (1642-1727) nació el 25 de Diciembre de 1642 según el calendario Juliano, todavía usado por entonces en Inglaterra, o el 4 de Enero de 1643 con respecto a nuestro calendario Gregoriano. Fue profesor de matemáticas en Cambridge y luego jefe de la casa de la moneda en Londres. Sus principales ideas fueron desarrolladas en 1664-1666 cuando estaba recluido en su casa natal de la aldea de Woolsthorpe, ya que el Trinity College de Cambridge, donde Newton era estudiante, estuvo cerrado por la epidemia de la peste. Allí desarrolló sus ideas de la gravitación universal, de la teoría de los colores y sobre la serie del binomio y el cálculo de fluxiones.

De naturaleza entonces tímida era reacio a publicar sus resultados, para así evitar las posibles críticas y controversias de sus contemporáneos. En Octubre de 1666 escribió un tratado sobre fluxiones y en 1669 De analysi, un tratado sobre series infinitas que circuló en forma de manuscrito entre los miembros de la Royal Society. Hay otro tratado sobre fluxiones y series infinitas de 1671 y otro sobre la cuadratura de curvas de 1693. Sin embargo estos fueron publicados hasta bien tarde y algunos sólo lo fueron después de su muerte. De analysi fue publicado en 1711 y el tratado sobre cuadratura de curvas, De Quadratura Curvarum de 1693 apareció como un apéndice de su Opticks en 1704. Su obra más famosa, donde expone su teoría de la gravitación universal, los Principia, fue publicada en 1687, pero sus argumentos son muy geométricos y sólo dan una idea de sus métodos del cálculo infinitesimal.

De entre el trabajo matemático de Newton, profundo y poderoso, se pueden distinguir algunos temas centrales. Estos son los desarrollos en serie de potencias, en especial el desarrollo del binomio, algoritmos para hallar raíces de ecuaciones y de inversión de series, relación inversa entre diferenciación e integración y el concepto de fluentes y fluxiones como variables que cambian en el tiempo. Newton estuvo muy interesado también en óptica, dinámica, alquimia, cronología de la historia y en la interpretación de las sagradas escrituras.

Gotfried Wilhem Leibniz (1646-1716) era hijo del vice-presidente de la facultad de filosofía de la universidad de Leipzig. De joven, estudió filosofía, derecho y lenguas clásicas. Su principal interés estuvo centrado en desarrollar una especie de lenguaje simbólico para representar los conceptos fundamentales del pensamiento humano y las maneras de combinar estos símbolos para llegar a conceptos más elaborados. Esta idea filosófica, que tiene relación con la combinatoria, fue ya algo en parte elaborada por franciscano mallorquín Ramón Llull (1235-1316) en su Arte Luliano. Poco después de acabar sus estudios, Leibniz empezó en 1672 una misión diplomática en Paris donde permanecería unos cuatro años hasta 1676. Allí conoció a numerosos filósofos y miembros de la alta sociedad, en particular al holandés C. Huygens (1629-1695), entonces miembro de la recién creada Académie Royale des Sciences. Como curiosidad Huygens le planteó a Leibniz que hallara la suma de los inversos de los números triangulares. Mediante sumas y diferencias Leibniz fue capaz de hallar la suma de esta serie y entonces creció su interés en estudiar matemáticas, cuya formación hasta entonces había sido muy escasa. Huygens le recomendó que leyera la renovada edición en latín de van Schooten de la Géometrie de Descartes y los trabajos de Pascal. La entrada matemática de Leibniz fue entonces impresionante, ya que le llevó al descubrimiento del cálculo en 1675 y su elaboración y publicación en dos cortos artículos del Acta Eruditorum después en 1684 y 1686, el primero sobre cálculo diferencial y el segundo sobre cálculo integral.

El trabajo de Leibniz se conoce principalmente por los numerosos artículos que publicó en Acta y por sus cartas personales y manuscritos que se conservan en Hannover. Entre estos documentos están los manuscritos fechados el 25, 26 y 29 de Octubre y el 1 y 11 de Noviembre de 1675 donde Leibniz estudia la cuadratura de curvas y desarrolla su cálculo diferencial e integral. Uno de los ingredientes fundamentales del cálculo de Leibniz son las reglas para la manipulación de los símbolos “R” y “d” de la integral y la diferencial. Esto refleja sus ideas filosóficas de buscar un lenguaje simbólico y operacional para representar los conceptos e ideas del pensamiento de tal manera que los razonamientos y argumentos se puedan escribir por símbolos y fórmulas. En matemáticas su cálculo es en parte esto, un algoritmo para escribir los métodos geométricos de cuadraturas y tangentes por medio de símbolos y fórmulas. Las otras dos ideas fundamentales del cálculo de Leibniz son la relación entre la sumas de sucesiones con las diferencias de sus términos consecutivos y el llamado triángulo característico.

Leibniz pasó la mayor parte del resto de su vida en Alemania, como consejero del duque de Hannover. Aparte de la invención y del desarrollo de su cálculo y en la solución de problemas geométricos y de ecuaciones diferenciales, Leibniz tiene otros trabajos en solvabilidad de ecuaciones y determinantes y escribió y contribuyó enormemente en prácticamente todos los campos del conocimiento humano, religión, política, historia, física, mecánica, tecnología, lógica, geología, lingüística e historia natural.

Aunque oscuros y difíciles de leer, los dos artículos de Acta de Leibniz de 1684 y 1686 fueron leídos por los hermanos Jakob y Johann Bernoulli. Jakob Bernoulli era profesor de matemáticas en Basilea y su hermano Johann, unos trece años más joven, le sucedió después en 1705. Ambos entendieron notablemente el simbolismo y los conceptos de Leibniz y publicaron varios artículos en Acta a partir de 1690. Después iniciaron una intensa y productiva correspondencia con Leibniz, resolviendo en unos pocos años numerosos problemas en los que el nuevo cálculo demostró toda su fuerza, tales como el la isocrona, la catenaria, la tractriz, la isocrona paracéntrica o la braquistocrona.

Referencias

Descubrimiento del cálculo. Recuperado el 29/05/2014 de http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/histmatem/calculo.pdf

Pérez, F. (2008).
VARIABLE. Universidad de Granada, Granada, España.

Stewart, J. (2001). Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas. Thomson Editores, S. A. de C. V. Bogotá, Colombia.